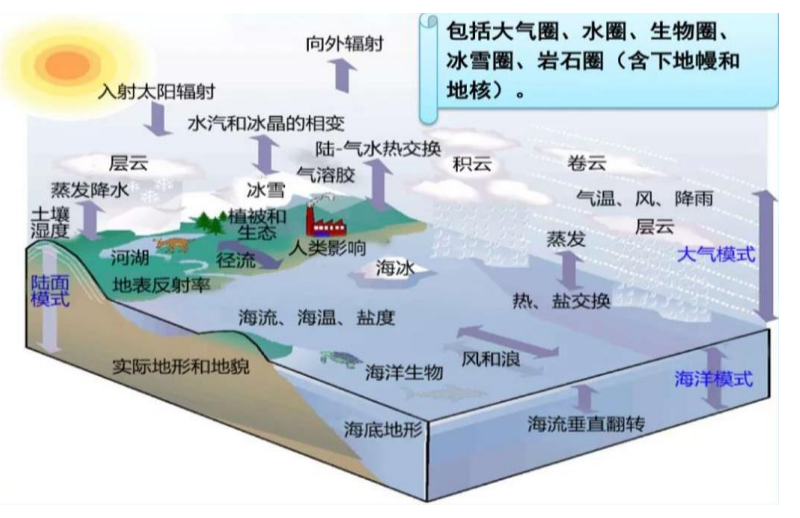


研究背景和意义



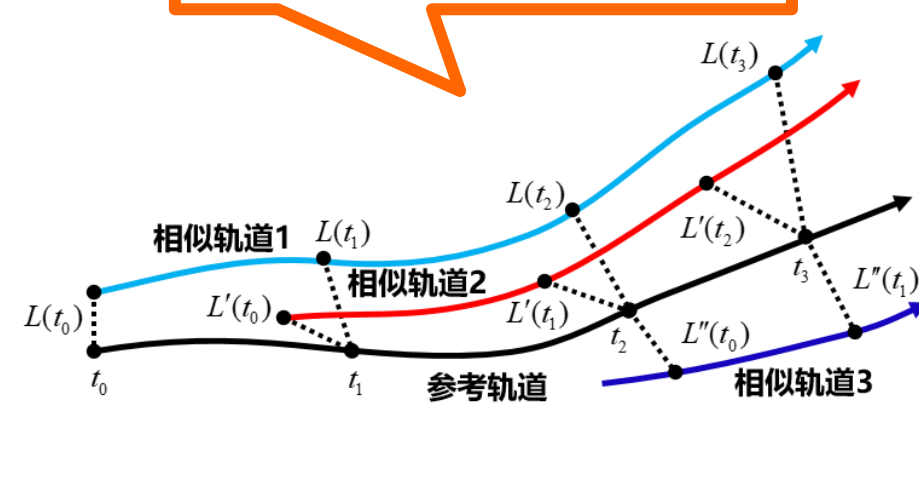
地球系统模式的发展是气象学现代化的重要标志之一，体现了物理学、化学、生物学与数学等多学科的高度交叉融合

在地球系统模式的研发过程中，数学是建立理论和解决问题必不可少的一部分内容

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = g - \frac{1}{\rho} \nabla p - 2\Omega \times V + F, \\ \frac{dp}{dt} + \rho \nabla \cdot V = 0, \\ p = \rho RT, \\ c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = Q, \\ \frac{dq}{dt} = S. \end{cases}$$



研究相对缺乏!



建立描述地球各圈层中复杂过程的数学方程组

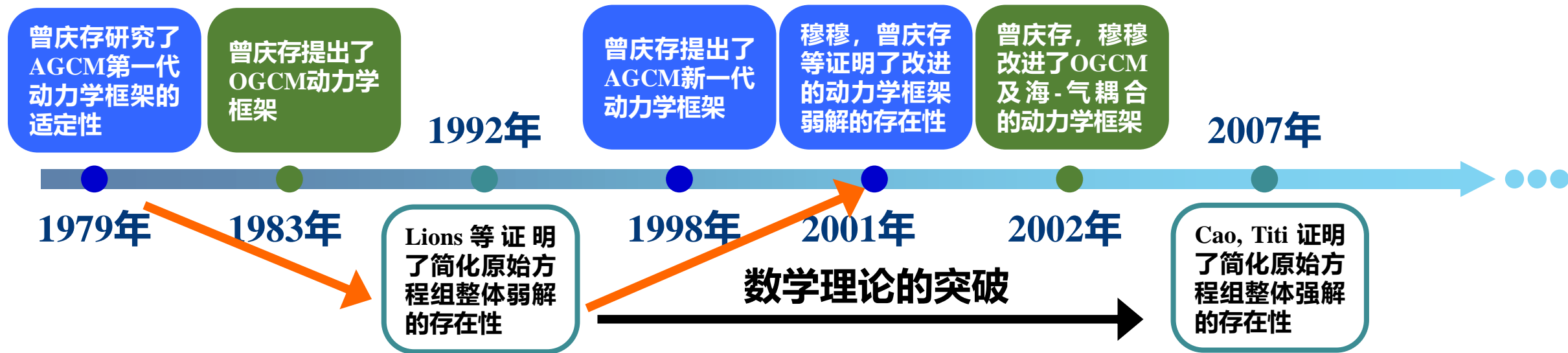
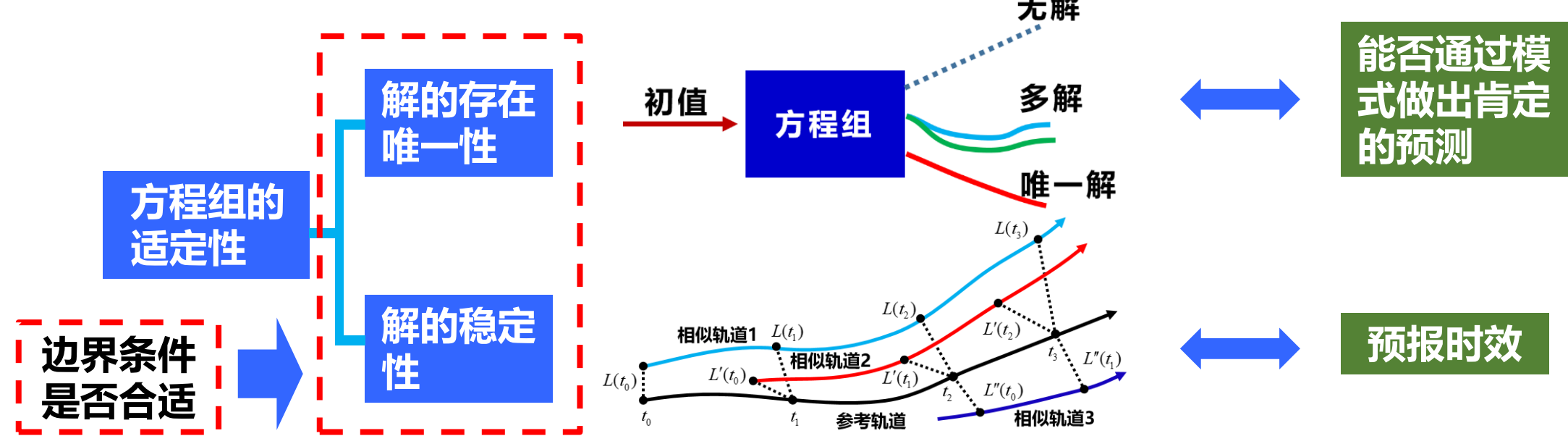
高性能数值计算方法

分析模式（方程组及初边值条件）在数学上是否合理的适定性问题



气象学家 V. 皮耶克尼斯首次（1904年）提出天气预报可以看作控制方程的初值问题。但由于方程组过于复杂，无法得到解析解

进行适定性分析，探讨解的特性，为模式的发展提供数学基础



- 随着地球系统模式的发展，动力学框架也越发复杂，为了模式预报的准确性，需要进一步研究模式动力学框架的数学特性。
- 需要数学和大气科学两个学科深度交叉融合，才能获得地球系统模式和地球流体力学严谨的数学理论研究的突破性进展!

大气环流模式动力学框架的适定性

消除整层无辐散近似
证明难点：地表气压的正则性估计

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V + \xi \frac{\partial V}{\partial \zeta} + \left(2\omega \cos \theta + \frac{\cot \theta}{a} v_x \right) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} V + \nabla \Phi' \\ + RT' \nabla \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} = \frac{\mu_2}{\beta_0} \Delta V + v_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{g \zeta}{RT' \beta_0} \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right), \\ \frac{R}{c_p c_0} \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + (V \cdot \nabla)T' + \xi \frac{\partial T'}{\partial \zeta} + \frac{R}{\beta_0 \zeta} \int_0^\zeta \nabla \cdot (\beta_0 V) \right) - \frac{R}{\beta_0} \nabla \cdot \beta_0 V \\ = \frac{R}{c_p c_0} \left(\frac{\mu_2}{\beta_0} \Delta T' + v_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{g \zeta}{RT' \beta_0} \frac{\partial T'}{\partial \zeta} \right) \right) + \frac{R \Psi}{c_p c_0}, \\ \frac{\partial p'_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\beta_0 V) + \frac{\partial \beta_0 \xi}{\partial \zeta} = \mu_2 \Delta p'_s, \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial \zeta} + \frac{RT'}{\zeta} = 0, \\ U|_{\zeta=0} = (v_\theta, v_\lambda, T')|_{\zeta=0} = (v_{\theta 0}, v_{\lambda 0}, T'_0) = U_0, \\ U(\theta, \lambda, p) = U(\theta + \pi, \lambda, \zeta) = U(\theta, \lambda + 2\pi, \zeta), \\ \frac{\partial U}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad \left(v_1 \frac{\partial V}{\partial \zeta} + k_{11} f(|V|)V \right) \Big|_{\zeta=1} = 0, \quad \left(v_2 \frac{\partial T'}{\partial \zeta} + k_{22} T' \right) \Big|_{\zeta=1} = 0. \end{cases}$$

取大气上界气压为零
证明难点：奇异性

合理的物理学边界条件
证明难点：复杂的边界项

研究方法：正斜压分解法；能量估计法；建立紧性框架

结论：

- IAP-AGCM动力学框架的整体弱解是稳定的
- IAP-AGCM动力学框架存在整体强解和吸引子，且该动力学框架具有向外源强迫的非线性适应过程

意义：在数学理论上严格证明了IAP-AGCM动力学框架的可靠性

加入了水汽相变过程的动力学框架的适定性

$$\begin{cases} \dots\dots \\ c_p \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + (V \cdot \nabla)T' + \xi \frac{\partial T'}{\partial \zeta} \right) - \frac{c_p c_0^2}{\beta_0 \zeta} \left(\beta_0 \xi \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial p'_s}{\partial t} + \nabla \beta_0 \cdot V \right) \right) \\ = \frac{\mu_2}{\beta_0} \Delta T' + v_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{g \zeta}{RT' \beta_0} \frac{\partial T'}{\partial \zeta} \right) + \frac{dQ}{dt}, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + (V \cdot \nabla)q + \xi \frac{\partial q}{\partial \zeta} = \frac{\mu_2}{\beta_0} \Delta q + v_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{g \zeta}{RT' \beta_0} \frac{\partial q}{\partial \zeta} \right) + F_q, \\ \frac{\partial m_w}{\partial t} + (V \cdot \nabla)m_w + \xi \frac{\partial m_w}{\partial \zeta} = \frac{\mu_2}{\beta_0} \Delta m_w + v_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{g \zeta}{RT' \beta_0} \frac{\partial m_w}{\partial \zeta} \right) - F_q + P, \\ \dots\dots \end{cases}$$

$\frac{dQ}{dt} = -\kappa_r T' - L \delta_{22} \delta_{22} (L_2 \frac{dW(T)}{dT})$
加热项（辐射加热 + 潜热加热）

$F_q = \delta_{21} \delta_{22} (L_2 \frac{dW(T)}{dT})$
凝结和蒸发引起的水量变化

$P = h_1 \left(\delta_{21} \delta_{22} (L_2 \frac{dW(T)}{dT}) \right)$
降水率

新增的奇异项

结论：

- 加入水汽相变过程的动力学框架存在整体弱解，且整体弱解是稳定的
- 加入水汽相变过程的动力学框架存在唯一的整体强解

意义：给出了考虑水汽相变过程的IAP-AGCM动力学框架的适定性分析，为模式的进一步发展提供了理论基础

海洋环流模式动力学框架的适定性

$$\begin{cases} \text{K K} \\ \frac{\partial S'}{\partial t} + (V \cdot \nabla)S' + \xi \frac{\partial S'}{\partial \zeta} - c_s^2 (1 + \zeta) \left(\kappa_0 \frac{\partial z'_w}{\partial t} + V \cdot \nabla z'_w - \kappa_0 k_w \Delta z'_w \right) \\ - c_s^2 \left(\zeta V \cdot \nabla \frac{\partial S'}{\partial \zeta} + \frac{1}{h} \nabla \cdot (\beta_0 k_w \nabla S') + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{k_{\text{ref}}}{\beta_0} \frac{\partial S'}{\partial \zeta} \right) \right), \\ \frac{\partial p'}{\partial \zeta} = -h' g \rho' \kappa_0, \\ \frac{\partial z'_w}{\partial t} + \nabla \cdot (h' V) + \frac{\partial h' \xi}{\partial \zeta} = \kappa_0 k_w \Delta z'_w, \\ \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=1} = \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=1} = \frac{\partial T'}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=1} = \frac{\partial S'}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=1} = \xi \Big|_{\zeta=1} = 0, \\ \left(k_{\text{ref}} \frac{\partial V}{\partial \zeta} + k_{11} f(|V|)V \right) \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad \left(k_{\text{ref}} \frac{\partial T'}{\partial \zeta} + k_{22} T' \right) \Big|_{\zeta=0} = 0, \\ \left(\frac{\partial S'}{\partial \zeta} + k_{33} (P + R - E)S' + \alpha |V_{10}|^2 S' \right) \Big|_{\zeta=0} = 0, \\ \xi \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad p' \Big|_{\zeta=0} = \kappa_0 \beta_0 g z'_w \Big|_{\zeta=0}(\theta, \lambda, t). \end{cases}$$

盐度方程
证明难点：盐度的正则性估计

海表高度方程
证明难点：海表高度的正则性估计

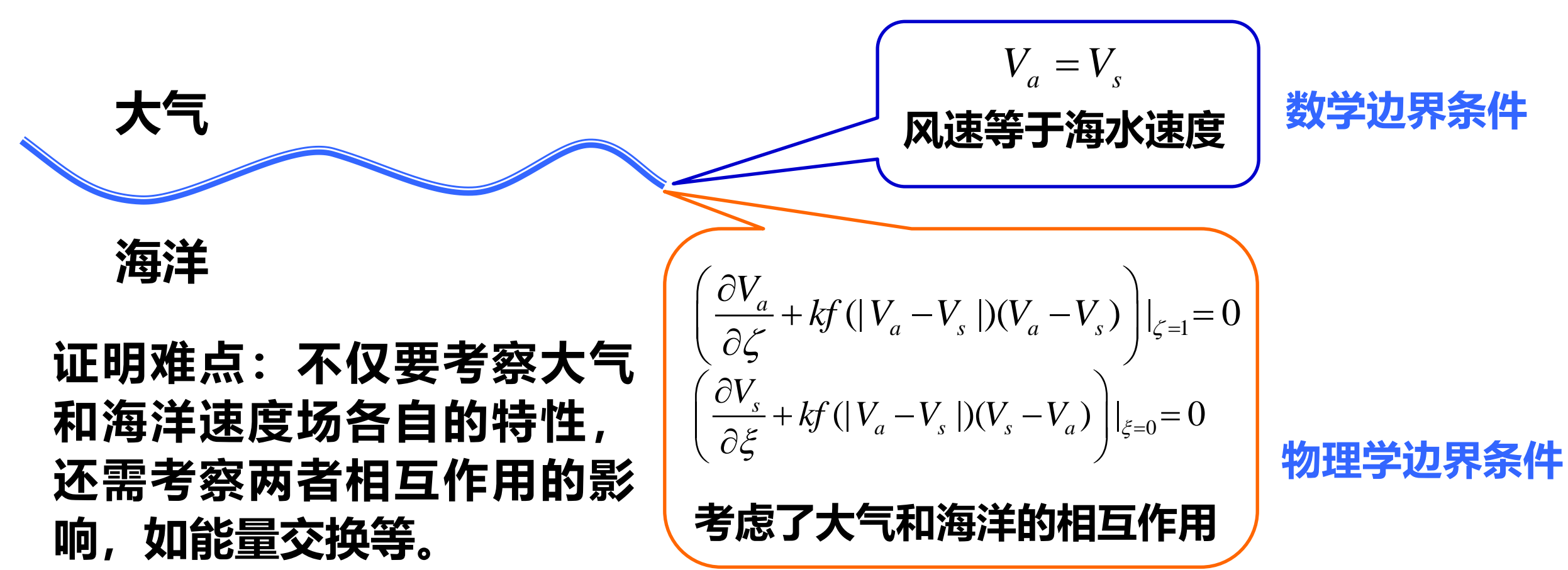
新盐度边界条件
证明难点：复杂的边界条件

结论：

- IAP-OGCM动力学框架存在整体弱解，且整体弱解是稳定的
- IAP-OGCM动力学框架存在整体强解和吸引子，且该动力学框架具有向外源强迫的非线性适应过程。

意义：在数学理论上严格证明了IAP-OGCM动力学框架的可靠性，并证实了盐度方程和新盐度边界条件不仅在物理上有意义，在数学上也是适定的

大气-海洋耦合动力学框架的适定性



结论：

- 大气海洋耦合动力学框架存在整体弱解，且整体弱解是稳定的

意义：证明了海气界面上物理边界条件在数学意义上的合理性，为模式的未来发展提供了数学基础

参考文献

曾庆存. 1979: 天气预报的数学物理基础. 北京: 科学出版社.
曾庆存. 1998: 一个可供现代数学分析研究的气候动力学模型. 大气科学, 22(4): 408-417.
Lian R. X., Q. C. Zeng, J. B. Jin, 2018: Stability of weak solutions to climate dynamics model with effects of topography and non-constant external force, SCIENCE CHINA Earth Sciences., 61: 47-59.
Lian R. X., Q. C. Zeng, 2018: Existence of a strong solution and trajectory attractor for a climate dynamics model with topography effects, Journal of Mathematical Analysis and Applications., 458: 628-675.
Lian R. X., J. Q. Ma. 2020: Existence of a strong solution to moist atmospheric equations with the effects of topography, Boundary Value Problems., 103: 1-34.